

Table des matières

0.1	Introduction	2
1	Espaces de suites	3
1.1	Les espaces de suites classiques.	3
1.2	Les espaces de suites p -sommables	7
1.3	Espaces de suites faiblement p -sommables	9
1.4	Propriétés	11
2	Idéaux des opérateurs linéaires	14
2.1	Définitions	14
2.2	L'idéal des opérateurs linéaires compacts	16
2.3	L'idéal des opérateurs linéaires de Hilbert-Schmidt	21
3	Les opérateurs linéaires absolument (p, q, r)-sommants.	26
3.1	Introduction	26
3.2	Les opérateurs linéaires (p, q, r) -sommants	29
3.3	Les opérateurs de types $D_{r^*} \circ \Pi_q$	36

0.1 Introduction

Dans ce travail on s'intéresse aux opérateurs linéaires considérés comme des applications d'un espace de suites dans un autre. On développe les propriétés de certains idéaux au sens de Pietsch. Plusieurs de ces idéaux d'opérateurs sont étudiés, parmi lesquelles on trouve l'idéal $\Pi_{p,q,r}$ des opérateurs linéaires (p, q, r) -sommants. Dans ce travail on étudie des problèmes de factorisation d'opérateurs à travers les espaces L_p . On généralise ainsi le résultat de Kwapien.

Dans ce qui suit nous allons développer les points suivants.

Au Chapitre **I**, on définit des espaces de suites classiques ainsi que des espaces de type p -sommables et de type faiblement p -sommables. Puis on en donne des propriétés.

Au Chapitre **II**, on définit et étudie les idéaux linéaires au sens de Pietsch. On en donnera quelques illustrations et exemples.

Enfin, dans le Chapitre **III**, on développe les propriétés de l'idéal $\Pi_{p,q,r}$, on donnera le théorème de domination de Pietsch pour cette catégorie et le théorème de Factorisation par les L_p . On terminera ce chapitre par le théorème de Kwapien (généraliser par Lapreste [Lap76], pour $p > 1$).

Chapitre 1

Espaces de suites

Dans ce chapitre nous étudions des espaces de suites classiques ainsi que des espaces de suites p -sommables et faiblement p -sommables. On en donnera ici quelques propriétés.

On désignera par X et Y deux espaces de Banach, et X^*, Y^* sont leurs espaces duaux. On note $\mathcal{L}(X; Y)$ l'espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y . La boule unité de X sera désignée par B_X .

Soient n un entier et $1 \leq p, p^* \leq \infty$ (où p^* est appelé l'indice conjugué de p *i.e.*, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$).

1.1 Les espaces de suites classiques.

Les espaces l_∞, c_0 et c .

Premières propriétés. Tout d'abord nous noterons S l'espace de toutes les suites $x = (x_n)_n$ réelles ou complexes. L'ensemble S est un espace vectoriel lorsqu'il est muni de la loi d'addition

$$x + y = (x_n + y_n)_n = (x_n)_n + (y_n)_n$$

et de la loi

$$\lambda x = (\lambda x_n)_n = \lambda (x_n)_n \text{ où } \lambda \in \mathbb{C}.$$

On utilisera dans la suite les sous espaces des suivants :

$$l_\infty = \{x = (x_n)_n \in S : \sup |x_n| < \infty\},$$

$$c_0 = \{x = (x_n)_n \in S : x_n \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)\},$$

$$c = \{x = (x_n)_n \in S : x_n \rightarrow l \ (n \rightarrow \infty) \text{ où } l \in \mathbb{C}\}.$$

On dit que l_∞ est l'espace des suites bornées, c_0 est l'espace des suites convergeant vers zéro et c est l'espace de toutes les suites convergentes.

Théorème 1.1. *Les ensembles l_∞, c_0, c munis de la norme*

$$\|x\|_\infty = \|x\|_{l_\infty} = \sup_n |x_n|.$$

sont des espaces de Banach.

Preuve.

Nous limiterons notre étude à l'espace l_∞ . Il est immédiat que l_∞ est un espace vectoriel, car

$$\|\lambda x\|_\infty = |\lambda| \|x\|_\infty \text{ pour } \lambda \in \mathbb{C};$$

et pour x et $y \in l_\infty$ on a

$$|x_n + y_n| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \text{ pour tout } n \tag{1.1}$$

d'où $x + y \in l_\infty$. On voit aisément que $\|\cdot\|_{l_\infty}$ est une norme sur l_∞ . En effet soit $x \in l_\infty$.

On a

$$\|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup_n |x_n| = 0 \Leftrightarrow x_n = 0 \text{ pour tout } n.$$

Donc $\|x\|_\infty = 0$ équivaut à $x = 0$. Soit λ un scalaire et $x \in l_\infty$. On a

$$\|\lambda x\|_\infty = \sup_n |\lambda x_n| = \sup_n |\lambda| |x_n| = |\lambda| \sup_n |x_n| = |\lambda| \|x\|_\infty.$$

L'inégalité $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ se déduit immédiatement de (1.1).

Considérons maintenant une suite de Cauchy $x^i = (x_n^i)_n$ de l_∞ . Soient $\varepsilon > 0$ donné et N un entier. Soient i et $j \geq N$ tels que

$$\|x^i - x^j\|_\infty = \sup_n |x_n^i - x_n^j| \leq \varepsilon.$$

On a alors

$$|x_n^i - x_n^j| \leq \varepsilon \text{ pour tout } n.$$

Pour chaque valeur de n , $(x_n^i)_n$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{C} donc convergente vers une limite x_n quand i tend vers l'infini. Posons $x = (x_n)_n$. On a donc $|x_n - x_n^j| \leq \varepsilon$ pour tout n . Ceci revient à dire que

$$\lim_i \|x^i - x^j\|_\infty = \|x - x^j\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Enfin $x = x - x^j + x^j \in l_\infty$, ce qui prouve que l_∞ est bien un espace vectoriel complet donc un espace de Banach. On obtient les mêmes résultats avec c_0 et c .

Remarque 1.2. L'espace c_0 c'est un sous espace fermé de l_∞ , donc un espace de Banach.

L'espace l_p

On considère ici un autre sous-espace de S défini pour $1 \leq p < \infty$ par

$$l_p = \left\{ x = (x_n)_n \in S : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

Rappelons quelques propriétés élémentaires de l_p qui s'avèreront indispensables pour la suite.

Proposition 1.3. Soit $1 \leq p < \infty$. On a

i) l_p est un sous espace vectoriel de S .

ii) l_p muni de la norme

$$\|(x_n)_n\|_p = \|(x_n)_n\|_{l_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

est un espace de Banach.

Démonstration.

On vérifie seulement (ii),

ii) Montrons que l_p est complet.

Soit $x^k = (x_n^k)_n$ une suite de Cauchy de l_p . Soient $\varepsilon > 0$ donné et k_0 un entier. Soient k et $m \geq k_0$ tels que

$$\|x^k - x^m\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^k - x_n^m|^p \leq \varepsilon^p. \quad (1.2)$$

On a alors

$$|x_n^k - x_n^m| \leq \varepsilon \text{ pour tout } n$$

et pour chaque valeur de n , $(x_n^k)_k$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{C} donc convergente vers une limite x_n quand k tend vers l'infini. Posons $x = (x_n)_n$. On a donc

$$|x_n - x_n^m| \leq \varepsilon \text{ pour tout } n. \text{ D'après (1.2) ceci revient à dire que pour tout } N \text{ entier}$$

on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N |x_n^k - x_n^m|^p = \sum_{n=1}^N |x_n - x_n^m|^p \leq \varepsilon^p.$$

En faisant tendre N vers l'infini on déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_n^m|^p \leq \varepsilon^p.$$

On a montré que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x^m\|_p^p = \|x - x^m\|_p^p \leq \varepsilon.$$

Enfin $x = x - x^m + x^m \in l_p$, ce qui prouve que l_p est bien un espace vectoriel complet donc un espace de Banach.

1.2 Les espaces de suites p -sommables

Définition 2.1

Une suite (x_n) (resp. $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$) dans X est absolument p -sommables si la suite scalaire $(\|x_n\|)_n$ (resp. $(\|x_i\|)_{1 \leq i \leq n}$) est dans l_p .

On note $l_p(X)$ (resp. $l_p^n(X)$) l'espace des suites $(x_n)_n$ (resp. $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$) dans X absolument p -sommables, muni de la norme

$$\begin{aligned} \|(x_n)\|_{l_p(X)} = \|(x_n)\|_p &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty \\ &= \sup_n \|x_n\|, \quad p = \infty \end{aligned}$$

(resp.

$$\begin{aligned} \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{l_p^n(X)} = \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_p &= \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty \\ &= \sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|, \quad p = \infty \end{aligned} \quad).$$

Une adaptation facile de la preuve usuel que l_p est un espace de Banach conduit rapidement à la conclusion que $l_p(X)$ est un espace de Banach.

Proposition 2.2. Soit $1 \leq p \leq \infty$. On a

i) $l_p(X)$ est un sous espace vectoriel.

ii) $l_p(X)$ est un espace de Banach.

Démonstration.

i) L'espace $l_p(X)$ est un espace vectoriel. Si $p = \infty$. Il est evident que $l_p(X)$ est un espace vectoriel.

Si $1 \leq p < \infty$. Soient $x, y \in l_p(X)$, l'inégalité de Minkowski nous donne

$$\left(\sum_n \|x_n + y_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_n \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_n \|y_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

C'est à dire $x + y \in l_p(X)$.

Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$\sum_n \| \lambda x_n \| ^p = |\lambda|^p \sum_n \| x_n \| ^p < \infty.$$

Donc, $l_p(X)$ est un espace vectoriel.

ii) L'espace $l_p(X)$ est normé.

On a l'inégalité de Minkowski se voit autrement, elle signifie que $\| \cdot \|_p$ vérifie l'inégalité triangulaire. Les autres conditions de la norme sont faciles à voir.

L'espace $l_p(X)$ est complet.

Pour cela on va montrer que toute suite de Cauchy est convergente. Soit $(x^j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $l_p(X)$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note $x^j = (x_1^j, \dots, x_n^j, \dots)$. La suite $(x^j)_{j \in \mathbb{N}}$ vérifie la condition de Cauchy, c'est à dire ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall j, j' > N \text{ on a } \| x^j - x^{j'} \|_p < \varepsilon$$

Cela signifie que

$$\| (x_i^j - x_i^{j'})_{i \in \mathbb{N}} \| < \varepsilon$$

Donc,

$$\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \| x_i^j - x_i^{j'} \| \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Ce qui implique que pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a $\| x_i^j - x_i^{j'} \| < \varepsilon$.

Maintenant, on fixe $i \in \mathbb{N}$ et refaisons la définition comme suivante

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall j, j' > N \text{ on a } \| x_i^j - x_i^{j'} \| < \varepsilon.$$

Ce qui montre que la suite $(x_i^j)_{j \in \mathbb{N}}$ est suite de Cauchy dans X , comme X est complet. Elle est donc convergente vers une limite $\overline{x_i}$. ça nous permet d'associer à chaque composante une limite réelle, donc la suite $(x^j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite qui est $\overline{x} = (\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \dots) = (\overline{x_i})_{i \in \mathbb{N}}$.

Il reste de vérifier que $\overline{x} \in l_p(X)$. En effet, en appliquant l'inégalité de Minkowski

$$\begin{aligned}
(\sum_{i \in \mathbb{N}} \|\bar{x}_i\|^p)^{\frac{1}{p}} &= (\sum_{i \in \mathbb{N}} \|x_i^j - x_i^i + \bar{x}_i\|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (\sum_{i \in \mathbb{N}} \|x_i^j\|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i \in \mathbb{N}} \|\bar{x}_i - x_i^j\|^p)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Comme $(x_i^j)_{i \in \mathbb{N}} \in l_p(X)$, le premier terme à droite est fini. Pour le deuxième terme, on écrit la définition d'une limite d'une suite on peut trouver qu'il est majoré par un ε . Donc, on a bien montré que $\bar{x} \in l_p(X)$.

1.3 Espaces de suites faiblement p -sommables

Définition 3.1

Une suites (x_n) (resp. $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$) dans X est faiblement p -sommables si la suite scalaire $(x^*(x_n))$ (resp. $(x^*(x_i)_{1 \leq i \leq n})$) est dans l_p pour tout $x^* \in X^*$.

On note $l_p^\omega(X)$ (resp. $l_p^{n\omega}(X)$) l'espace des suites (x_i) (resp. $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$) dans X faiblement p -sommables.

Théorème 3.2

i) L'espace $l_p^\omega(X)$ est un espace normé et la norme est donnée par

$$\begin{aligned}
\|(x_i)\|_{l_p^\omega(X)} = \|(x_i)\|_{p,\omega} &= \sup \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} : x^* \in B_{X^*} \right\} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty \\
&= \sup_n \{ \sup \{ |x^*(x_n)| : x^* \in B_{X^*} \} \}, \quad p = \infty
\end{aligned}$$

ii) $l_p^\omega(X)$ est un espace de Banach.

Démonstration.

La première étape est de montrer que cette quantité $(\|(x_n)\|_{l_p^\omega(X)})$ est finie, et pour ce qui nous appliquons le théorème de graphe fermé.

i) Prendre (x_n) dans $l_p^\omega(X)$ et de s'associer avec elle une application linéaire

$$T : X^* \rightarrow l_p$$

définie par :

$$T(x^*) = (x^*(x_n))_n.$$

T est bien définie et linéaire.

Si, $(x_n^*)_n$ converge vers $x^* \in X^*$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite $(x_k^*(x_n))_k$ est convergente vers $x^*(x_n)$. Par conséquent T est de graphe fermé et donc borné, en d'autres termes

$$\|T\| = \sup \left\{ \left(\sum_n |x^*(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} : x^* \in B_{X^*} \right\} < \infty$$

qui est ce qui nous voulions.

On peut conclure facilement que $\|(x_n)_n\|_{l_p^s(X)}$ est une norme. \square

ii) Si $p = \infty$ on a $l_\infty(X) = l_\infty^w(X)$, il est donc que $l_\infty^w(X)$ est un espace de Banach. Soit $1 \leq p < \infty$.

L'espace $l_p^w(X)$ est complet. Ici, nous utilisons un raisonnement direct ; un peu plus tard (voir Proposition 3.3), nous allons indiquer une (façon différente) route plus tortueuse.

Soient X est un espace de Banach et $x^k = (x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $l_p^w(X)$. La suite $(x^j)_{j \in \mathbb{N}}$ vérifie la condition de Cauchy, c'est à dire $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall k, k' \geq N$ on a

$$\sum_n |\langle x^*, x_n^k \rangle - \langle x^*, x_n^{k'} \rangle|^p \leq \varepsilon^p. \quad (3.1)$$

pour tout $x^* \in B_{X^*}$. Chaque terme de cette série est dominée par ε^p , donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n^k - x_n^{k'}\| = \sup \left\{ |\langle x_n^k, x^* \rangle - \langle x_n^{k'}, x^* \rangle| : x^* \in B_{X^*} \right\} \leq \varepsilon$$

Ce qui montre que la suite $(x_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans X , comme X est complet. Elle est donc convergente vers une limite x_n . ça nous permet d'associer à chaque composante une limite, donc la suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite qui est $x = (x_n)_n$. Il reste de vérifier que $x \in l_p^w(X)$.

D'après (3.1) et soit k' tend vers l'infinie. Alors, quand $k \geq N$ on a

$$\left(\sum_n | \langle x^*, x_n - x_n^k \rangle |^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon. \forall x^* \in B_{X^*}.$$

Donc $x - x^k$ et x appartient à $l_p^w(X)$. \square

Proposition 3.3. *Soit $1 < p \leq \infty$. On a $l_p^w(X) = \mathcal{L}(l_{p^*}, X)$ isométrique. En d'autres termes, soit $v : l_{p^*} \rightarrow X$ un opérateur linéaire tel que $v(e_i) = x_i$ et (e_i) est la base canonique de l_{p^*} . Alors*

$$\| v \| = \| (x_n) \|_{p, \omega}. \quad (3.2)$$

Démonstration. Soient (e_i) est la base canonique de l_{p^*} et $\alpha = (\alpha_i) \in l_{p^*}$, on a

$$\begin{aligned} \| v \| &= \sup_{\alpha = (\alpha_i) \in B_{l_{p^*}}} \| v(\alpha) \|_X \\ &= \sup_{\alpha = (\alpha_i) \in B_{l_{p^*}}} \left[\sup_{\xi \in B_{X^*}} | \langle v(\alpha), \xi \rangle | \right] \\ &= \sup_{\alpha = (\alpha_i) \in B_{l_{p^*}}} \left[\sup_{\xi \in B_{X^*}} \left| \sum_i \alpha_i \langle v(e_i), \xi \rangle \right| \right] \\ &= \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left[\sup_{\alpha = (\alpha_i) \in B_{l_{p^*}}} \left| \sum_i \alpha_i \langle x_i, \xi \rangle \right| \right] \\ &= \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} | \langle x_i, \xi \rangle |^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] = \| (x_n) \|_{p, \omega} \end{aligned}$$

1.4 Propriétés

Les relations entre les différents espaces sont données par le théorème suivant :

Théorème 4.1

(1) Pour $1 \leq p \leq \infty$, on a $l_p(X) \subseteq l_p^w(X)$, de plus

$$\| (x_i) \|_{l_p^w(X)} \leq \| (x_i) \|_{l_p(X)}.$$

(2) Si $p = \infty$, on a $l_{\infty}(X) = l_{\infty}^w(X)$ et

$$\|(x_i)\|_{l_\infty(X)} = \|(x_i)\|_{l_\infty^\omega(X)}.$$

(3) [DJT95, Pargraphe 2.18] $l_p(X) = l_p^w(X)$ pour tout $1 \leq p < \infty$ si et seulement si $\dim(X)$ est finie.

Proposition 4.2

Soit $1 \leq p < \infty$ et $(y_i^*)_{1 \leq i \leq n} \in l_{p,w}^n(Y^*)$. On sait que

$$\|(y_i^*)_{1 \leq i \leq n}\|_{p,w} = \sup_{\varphi \in B_{Y^{**}}} \left(\sum_{i=1}^n |\varphi(y_i^*)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))_{1 \leq i \leq n}\|_p$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \sup_{\varphi \in B_{Y^{**}}} \left(\sum_{i=1}^n |\varphi(y_i^*)|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{\|(\lambda_i)\|_{p^*=1}} \sup_{\varphi \in B_{Y^{**}}} \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(y_i^*) \right| \\ &= \sup_{\varphi \in B_{Y^{**}}} \sup_{\|(\lambda_i)\|_{p^*=1}} \left| \varphi \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^* \right) \right| \\ &= \sup_{\|(\lambda_i)\|_{p^*=1}} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^* \right\| \\ &= \sup_{\|(\lambda_i)\|_{p^*=1}} \sup_{\zeta \in B_Y} \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^*(\zeta) \right| \\ &= \sup_{\zeta \in B_Y} \sup_{\|(\lambda_i)\|_{p^*=1}} \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^*(\zeta) \right| \\ &= \sup_{\zeta \in B_Y} \left(\sum_{i=1}^n |y_i^*(\zeta)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Proposition 4.3

Soit $1 \leq p \leq \infty$. Pour toute $(x_i)_{i=1}^n \subset X$, il existe x_0^* tel que

$$\sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^n |x_0^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Preuve.

Soit $(x_i)_{i=1}^n \subset X$. Considérons la fonction $x^* \mapsto \| (x^*(x_i))_{i=1}^n \|_{l_p}$ de X^* dans \mathbb{R} . On muni la boule B_{X^*} de la topologie $*$ -faible qui la rend compacte. Comme la dernière fonction est continue sur B_{X^*} , elle atteint donc son maximum, i.e., il existe $x_0^* \in B_{X^*}$ tel que

$$\sup_{x^* \in B_{X^*}} \| (x^*(x_i))_{i=1}^n \|_{l_p(X)} = \| (x_0^*(x_i))_{i=1}^n \|_{l_p(X)}$$

d'où le résultat.

Chapitre 2

Idéaux des opérateurs linéaires

2.1 Définitions

Définition 1.1

Un opérateur linéaire $T : X \rightarrow Y$ est de rang fini si $\dim T(X) < \infty$.

L'espace des opérateurs linéaires de rang fini sera noté $\mathcal{L}_f(X; Y)$.

Exemple 1.2

- 1) L'opérateur linéaire nul, i.e. $0x = 0$, pour tout $x \in X$ est de rang fini. En effet, $0X = \{0\}$ et $\dim \{0\} = 0$.
- 2) Si $\dim X = n$, tout opérateur linéaire de X dans Y est de rang fini. En effet,

$$\dim T(X) \leq \dim X = n.$$

Exemple 1.3

Une forme linéaire $\varphi : X \rightarrow \mathbb{K}$ est un opérateur linéaire de rang fini.

En effet, $\varphi(X) = \{0\}$ ou bien $\varphi(X) = \mathbb{K}$, i.e. $\dim \varphi(X) < \infty$. Car,

si $\varphi \neq 0$, alors il existe $x_0 \in X$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$. Posons $x_1 = \frac{x_0}{\varphi(x_0)}$. Donc $\varphi(x_1) = 1$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\varphi(\lambda x_1) = \lambda \varphi(x_1) = \lambda.$$

Proposition 1.4 [Con 01, Page 183] (*Opérateurs de rang fini*).

Un opérateur linéaire $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ est de rang fini si et seulement s'il est de la forme

$$T = \sum_{k=1}^n x_k^* \otimes y_k : x \rightarrow \sum_{k=1}^n \langle x_k^*, x \rangle y_k,$$

où $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$ et $y_1, \dots, y_n \in Y$.

Remarque 1.5

Soit $x^* \in X^*$ et $y \in Y$. Alors l'opérateur

$$T_{x^* \otimes y} = x^* \otimes y : x \rightarrow x^*(x) y = \langle x^*, x \rangle y,$$

est de rang un et $\|x^* \otimes y\| = \|x^*\| \|y\|$.

Définition 1.6 (*Idéal des opérateurs linéaires*).

Un idéal des opérateurs linéaires \mathcal{M} est une classe d'opérateurs linéaires bornés tels que pour tout X et Y des espaces de Banach on a :

- (1) L'ensemble $\mathcal{M}(X; Y)$ est un sous espace de $\mathcal{L}(X; Y)$ qui contient les opérateurs linéaires de rang finis.
- (2) *Propriété d'idéal* : si $T \in \mathcal{M}(X; Y)$, $u \in \mathcal{L}(E; X)$ et $v \in \mathcal{L}(Y; F)$, alors $v \circ T \circ u$ est dans $\mathcal{M}(E; F)$.

De plus, si $\|\cdot\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfait

- (1') $(\mathcal{M}(X; Y), \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ est un espace normé (Banach)
- (2') $\|A : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}; A(\lambda) = \lambda\|_{\mathcal{M}} = 1$.
- (3') Si $T \in \mathcal{M}(X; Y)$, $u \in \mathcal{L}(E; X)$, $v \in \mathcal{L}(Y; F)$,

$$\|v \circ T \circ u\|_{\mathcal{M}} \leq \|v\| \|T\|_{\mathcal{M}} \|u\|.$$

Alors $(\mathcal{M}; \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ s'appelle idéal normé (de Banach) des opérateurs linéaires.

2.2 L'idéal des opérateurs linéaires compacts

Rappelons qu'une partie A d'un espace topologique séparé X est dite relativement compacte dans X si son adhérence \overline{A} dans X est compacte. Une partie A d'un espace métrique $(X; d)$ est dite précompacte si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de A par des parties de diamètre $\leq \epsilon$. Cela revient à dire que pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver un entier n et des points $x_1, \dots, x_n \in X$ tels que A soit contenu dans la réunion des boules $B(x_i, \epsilon)$, $i = 1, \dots, n$.

Théorème 2.1

Un espace métrique est compact si et seulement s'il est précompact et complet.

Démonstration.

(i) \Rightarrow (ii) : soit (x_n) une suite de Cauchy de X . Comme (X, d) est un espace métrique compact, la suite (x_n) a une valeur d'adhérence. Mais comme elle est de Cauchy, elle converge. En conséquence (X, d) est complet. Par ailleurs, la compacité assure aussi que X peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de n'importe quel rayon donné.

(ii) \Rightarrow (i) : Supposons que (X, d) soit complet et que, pour tout $\epsilon > 0$, X puisse être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ϵ . Soit (x_n) une suite de $X^{\mathbb{N}}$. Par extractions successives puis procédé diagonal, on construit une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $X^{\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ on ait $x_{\varphi(n+p)} \in B(y_n, 2^{-n})$. Pour cela, on commence par sélectionner une boule $B(y_0, 1)$ contenant une infinité de termes de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Cela permet de définir une suite extraite $(x_{\varphi_0(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in B(y_0, 1)^{\mathbb{N}}$. Ensuite, on choisit une boule $B(y_1, 1/2)$ contenant une suite extraite $(x_{\varphi_0(\varphi_1(n))})_{n \in \mathbb{N}}$, de $(x_{\varphi_0(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, etc. Par extractions successives puis procédé diagonal, on obtient finalement une suite extraite ayant la propriété voulue. La suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy donc converge. Donc (X, d) est compact.

Corollaire 2.2

Dans un espace métrique complet $(X; d)$, une partie A est relativement compacte si et seulement si elle est précompacte.

Démonstration.

(i) \Rightarrow (ii) Il suffit de remarquer que

$$\overline{A} \subset \cup_{x \in A} B(x, \epsilon)$$

Comme \overline{A} est compact, on peut extraire du recouvrement ci-dessus un sous-recouvrement fini de \overline{A} donc (a fortiori) de A .

(ii) \Rightarrow (i) Pour démontrer la réciproque, on remarque que la complétude de (X, d) assure que (\overline{A}, d) est complet. Il est clair que si pour tout $\epsilon > 0$, la partie A peut être recouverte par un nombre fini de boules centrées en des points de A , il en est de même pour \overline{A} . En effet

$$\overline{A} \subset \cup_{k=1}^n B(x_k, \frac{\epsilon}{2}) \Rightarrow \overline{A} \subset \cup_{k=1}^n B(x_k, \epsilon).$$

Le théorème précédent permet de conclure que (\overline{A}, d) est compact.

Corollaire 2.3

Les compacts de \mathbb{R} sont les ensembles fermés bornés.

Démonstration.

On sait déjà que dans un espace métrique, les compacts sont fermés bornés. Réciproquement, sachant que \mathbb{R} est complet et que toute partie bornée de \mathbb{R} peut être recouverte par un nombre fini de boules de rayon ϵ arbitrairement fixé, le corollaire précédent assure que toute partie bornée de \mathbb{R} est relativement compacte.

Notons une conséquence facile : pour qu'une partie A d'un espace métrique complet X soit relativement compacte, il suffit que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une partie compacte K_ϵ de X telle que tout point de A soit à une distance $< \epsilon$ de l'ensemble K_ϵ

$$\forall x \in A, d(x, K_\epsilon) < \epsilon.$$

Dans le cas d'un sous-ensemble A d'un espace de Banach E , il est agréable de retenir un critère qui utilise le caractère vectoriel de l'espace ambiant : pour que l'adhérence

de A soit compacte dans l'espace de Banach E , il faut et il suffit que A vérifie les deux conditions suivantes :

- a. l'ensemble A est borné ;
- b. pour tout $\epsilon > 0$, il existe un sous-espace vectoriel $L_\epsilon \subset E$ de dimension finie tel que tout point de A soit à une distance $< \epsilon$ de L_ϵ :

$$\forall x \in A, d(x, L_\epsilon) < \epsilon.$$

Si l'adhérence de A est compacte il est facile de vérifier que le critère est satisfait : en effet \overline{A} est borné parce que compact (la fonction continue $x \rightarrow \|x\|$ atteint son maximum sur le compact \overline{A}) et la deuxième condition est évidemment impliquée par la précompacité : il suffit de prendre l'espace vectoriel L_ϵ engendré par un ensemble fini F_ϵ qui approche A à moins de ϵ .

Dans l'autre direction, supposons les deux conditions du critère vérifiées, et montrons que A est approchable arbitrairement bien par des compacts de E ; soit M une borne pour les normes des éléments de A ; soient $\epsilon > 0$ et L_ϵ un sous-espace vectoriel de dimension finie qui approche A à moins de ϵ . Désignons par K_ϵ le compact de E formé par les points de L_ϵ de norme $\leq M + \epsilon$. Si $x \in A$, il existe $y \in L_\epsilon$ tel que $\|x - y\| \leq \epsilon$; puisque $\|x\| \leq M$, on aura $\|y\| \leq M + \epsilon$, d'où $y \in K_\epsilon$, et le résultat est démontré.

Proposition 2.4

Si K_1 et K_2 sont compacts dans l'espace de Banach E , l'ensemble $K_1 + K_2$ est compact ; si A_1 et A_2 sont relativement compacts dans l'espace de Banach E , l'ensemble $A_1 + A_2$ est relativement compact dans E .

Démonstration.

Il est clair que $K_1 + K_2$ est borné. Si $L_j, j = 1, 2$, est un sous-espace vectoriel de dimension finie qui approche K_j à moins de $\frac{\epsilon}{2}$, il est facile de vérifier que le sous-espace de dimension finie $L_1 + L_2$ approche $K_1 + K_2$ à moins de ϵ . De plus $K_1 + K_2$ est fermé, donc compact, comme image du compact $K_1 \times K_2$ par l'application continue $(x; y) \rightarrow x + y$. La deuxième affirmation résulte facilement de la première, car l'adhérence de la somme

$A_1 + A_2$ est contenue dans $\overline{A_1} + \overline{A_2}$.

Applications linéaires compactes

Définition 2.5

Un opérateur linéaire $T : X \rightarrow Y$ est dit compact si $T(B_X)$ est relativement compact dans Y (c'est-à-dire l'adhérence $\overline{T(B_X)}$ de $T(B_X)$ est compacte). On note $\mathcal{K}(X; Y)$ l'ensemble des opérateurs compacts de X dans Y .

Remarque 2.6

- (1) Si T est un opérateur compact alors T est borné car la norme de Y est bornée sur le compact $\overline{T(B_X)}$. Donc $T \in \mathcal{L}(X; Y)$.
- (2) Un opérateur linéaire T est compact si et seulement si pour toute suite bornée $(x_n)_n$ de X , la suite des images $(T(x_n))_n$ admet une sous-suite convergente.
- (3) Si Y est complet, la précompacité de $A \subset Y$ implique la compacité de A . Donc $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ est compact si et seulement si $T(B_X)$ est précompact.

On rappelle que si X et Y sont deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, alors $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ pour tout partie A de X . L'adhérence \overline{A} de A est le plus petit fermé qui contient A . Si donc $A \subset B$ et B est fermé, alors $\overline{A} \subset B$. Toute partie fermée d'un espace compact est compacte et, réciproquement, toute partie compacte d'un espace topologique séparé est fermée. En outre, l'image continue d'un compact est compact.

Théorème 2.7

- 1- $\mathcal{K}(X; Y)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(X; Y)$.
- 2- Un opérateur linéaire de rang fini est un opérateur compact.
- 3- Si $T : X \rightarrow Y$ et $S : Y \rightarrow Z$ sont des applications linéaires bornées entre espaces de Banach et si S ou T est compact, alors la composée $S \circ T$ est un opérateur compact.
- 4- $\mathcal{K}(X; Y)$ est un idéal.

Corollaire 2.8

Soit (T_n) une suite d'opérateurs linéaires de rang fini de X dans Y . Si $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ et $\|T_n - T\| \rightarrow 0$, alors $T \in \mathcal{K}(X; Y)$.

Le "problème d'approximation" de Banach concerne la réciproque du corollaire 2.8, c'est-à-dire si tout opérateur linéaire compact est la limite dans la norme d'opérateurs d'une suite d'opérateurs linéaires de rang fini. En général, la réponse est négative; la réponse est toutefois positive sous des hypothèses additionnelles, par exemple si Y est un espace de Hilbert.

Théorème 2.9

Si Y est un espace de Hilbert alors tout opérateur compact $T : X \rightarrow Y$ est limite dans $\mathcal{L}(X; Y)$ d'une suite d'opérateurs de rang fini. (Autrement dit, les opérateurs de rangs finis forment un sous-espace dense de $K(X; Y)$).

Démonstration. Soit T est un opérateur compact. Puisque l'adhérence de $T(B_X)$ est compacte, pour tout $\epsilon > 0$ il existe un ensemble fini $\{y_1, \dots, y_n\}$ dans Y tel que pour tout $x \in B_X$ il existe $j(x)$ tel que $\|Tx - y_{j(x)}\| \leq \epsilon$. On considère alors la projection P_ϵ sur le sous-espace de dimension finie Y_ϵ engendré par les y_j . L'opérateur $T_\epsilon = P_\epsilon \circ T$ est alors de rang fini et $\|T - T_\epsilon\| \leq \epsilon$. En effet, si $x \in B_X$, alors la projection $T_\epsilon(x) = P_\epsilon(T(x))$ de Tx est l'élément de Y_ϵ de distance minimale avec Tx . Donc

$$\|Tx - T_\epsilon x\| \leq \|Tx - y_{j(x)}\| \leq \epsilon.$$

Par continuité, $\|Tx - T_\epsilon x\| \leq \epsilon$ pour tout $x \in X$ avec $\|x\| \leq 1$. Ainsi

$$\|T - T_\epsilon\| \leq \epsilon.$$

Exemple 2.10

Il est clair que tout opérateur T de rang fini est compact : en effet, l'ensemble $T(B_E)$ est alors un ensemble borné d'un espace vectoriel de dimension finie. D'après le résultat précédent, toute limite T en norme d'opérateur d'une suite (T_n) d'opérateurs de rang fini est compacte.

C'est une méthode assez efficace pour vérifier que certains opérateurs sont compacts; on montre par exemple que si $c_n \rightarrow 0$, l'opérateur Δ_c de l_p dans l_p défini par $\Delta_c((x_n)) =$

$(c_n x_n)$ est compact.

On commence par remarquer que la norme de Δ_c dans $\mathcal{L}(l_p)$ est majorée par $\|c\|_\infty$ (elle est en fait égale à $\|c\|_\infty$). Ensuite, pour tout entier N on considère la suite $c^{(N)}$ telle que

$$c^{(N)} = \begin{cases} c_n & \text{si } n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ;$$

l'opérateur $T_N = \Delta_{c^{(N)}}$ est de rang fini, et $\|\Delta_c - T_N\| = \|\Delta_{c-c^{(N)}}\|$ est majoré par $\|c - c^{(N)}\|_\infty = \sup_{n>N} |c_n|$ qui tend vers 0 parce que la suite (c_n) tend vers 0.

2.3 L'idéal des opérateurs linéaires de Hilbert-Schmidt

Dans toute cette section H , H_1 et H_2 désignant des espaces de Hilbert sur \mathbb{C} . On supposera que tout espace de Hilbert est séparable (d'où, dans le cas de dimension infinie, toute base est dénombrable).

On rappelle la définition d'adjoint d'un opérateur linéaire borné.

Soit $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$. Alors il existe un et un seul opérateur linéaire borné $T^* \in \mathcal{L}(H_2; H_1)$ vérifiant pour tout $x \in H_1$, $y \in H_2$

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle .$$

L'opérateur T^* est appelé opérateur adjoint de T , et l'on a $\|T\| = \|T^*\|$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup \{ |\langle Tx, y \rangle| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \} \\ &= \sup \{ |\langle x, T^*y \rangle| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \} \\ &= \|T^*\| . \end{aligned}$$

En outre, si $S, T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$, alors $(ST)^* = T^*S^*$.

Définition 3.1

Soit $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$. On dit que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt s'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 1}$ de H_1 telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T(e_n)\|^2 < \infty.$$

On note $\mathcal{L}_{HS}(H_1; H_2)$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt de H_1 dans H_2 .

Remarque 3.2

On remarque que la condition pour $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ d'être un opérateur de Hilbert-Schmidt revient au fait qu'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 1}$ telle que la suite numérique $(\|T(e_n)\|)_n$ est dans l'espace de Hilbert $l^2(\mathbb{R})$.

Lemme 3.3

(a) Si $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ alors pour toutes bases hilbertiennes $(e_n)_{n \geq 1}$ de H_1 et $(f_n)_{n \geq 1}$ de H_2 , on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T(e_n)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\langle T e_n, f_m \rangle|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|T^*(f_m)\|^2 \quad (3.1)$$

(valeur finie ≥ 0 ou bien $+\infty$).

(b) Si $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ est de Hilbert-Schmidt, il en est de même pour T^* .

(c) La série $\sum_{n=1}^{\infty} \|T(e_n)\|^2$ converge pour toute base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 1}$ de H_1 .

Preuve.

L'égalité (3.1) est une conséquence de l'égalité de Bessel et du fait qu'on peut renverser l'ordre des sommations car les sommants sont positifs ou nuls.

Pour $x \in H_1$ et $y \in H_2$ on a

$$\|x\|^2 = \sum_{b \in B} |\langle x, b \rangle|^2, \quad \|y\|^2 = \sum_{b' \in B'} |\langle b', y \rangle|^2.$$

d'où le résultat.

(b) et (c) suivent immédiatement de (a).

D'après le lemme 3.3., l'expression $\sum_{n=1}^{\infty} \|T(e_n)\|^2$ ne dépend pas du choix de la base et

dépend uniquement de T (Il est clair que $\sum_{n=1}^{\infty} \|T(e_n)\|^2$ ne dépend pas de $(f_n)_{n \geq 1}$ et que $\sum_{m=1}^{\infty} \|T^*(f_m)\|^2$ ne dépend pas de $(e_n)_{n \geq 1}$). On pose

$$\|T\|_{HS} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|T(e_n)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

On pose aussi

$$\langle S, T \rangle_{HS} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Se_n, Te_n \rangle \quad (3.3)$$

On a

$$\langle Se_n, Te_n \rangle \leq \|Se_n\| \|Te_n\| \leq \frac{\|S(e_n)\|^2 + \|T(e_n)\|^2}{2}$$

Par conséquent, la suite $(\langle Se_n, Te_n \rangle)_n$ est bien sommable pour $S, T \in \mathcal{L}_{HS}(H_1; H_2)$.

Le lemme suivant montre notamment que $\mathcal{L}_{HS}(H_1; H_2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(H_1; H_2)$.

Lemme 3.4

Avec la convention $0\infty = 0$, nous avons les propriétés suivantes pour tout $S, T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$

- (a) $\|T + S\|_{HS} \leq \|T\|_{HS} + \|S\|_{HS}$
- (b) $\|\lambda S\|_{HS} = |\lambda| \|S\|_{HS}$
- (c) $\|ST\|_{HS} \leq \|S\| \|T\|_{HS}$ et $\|TS\|_{HS} \leq \|S\| \|T\|_{HS}$
- (d) $\|T\| \leq \|T\|_{HS}$.

Preuve.

Dans toutes les relations, si $\|T\|_{HS} = \infty$ (ou $\|S\|_{HS} = \infty$ dans la première), alors les relations sont clairement satisfaites. On suppose donc que nos opérateurs sont tous d'image nie par $\|\cdot\|_{HS}$.

D'après la Remarque **3.2**, l'inégalité dans (a) correspond a l'inégalité de Minkowski pour $l_2(\mathbb{R})$.

L'égalité (b) est clairement vraie.

Pour la base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 1}$ de H_1 on a

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|ST(e_n)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|S\|^2 \|T(e_n)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|S\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|T(e_n)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|S\| \|T\|_{HS} \end{aligned}$$

Ce qui prouve la première inégalité de (c). Pour la deuxième, on remarque que d'après le Lemme **2.3.3**. on a

$$\begin{aligned} \|TS\|_{HS} &= \|(TS)^*\|_{HS} . \\ &= \|S^*T^*\|_{HS} \\ &\leq \|S^*\| \|T^*\|_{HS} \\ &= \|S\| \|T\|_{HS} \end{aligned}$$

Il nous reste à prouver la dernière inégalité. Soit $x \in H_1$ avec $\|x\| = 1$. On considère une base hilbertienne (e_n) pour H_1 telle que $e_1 = x$. Alors, on a

$$\|Tx\|^2 = \|Te_1\|^2 \leq \sum_{n \geq 1} \|Te_n\|^2 = \|T\|_{HS}^2$$

Ce implique que

$$\|T(x)\| \leq \|T\|_{HS} .$$

Donc

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| \leq \|T\|_{HS} .$$

Théorème 3.5

- (1)- $(\mathcal{L}_{HS}(H_1; H_2); \langle \cdot, \cdot \rangle_{HS})$ est un espace de Hilbert.
- (2)- Tout opérateur de rang fini est de Hilbert-Schmidt.
- (3)- $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ est de Hilbert-Schmidt si et seulement s'il existe une suite (T_n) d'opérateurs de rangs finis telle que $\|T_n - T\|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. (Autrement dit, les opérateurs de rangs finis forment un sous-espace dense de $\mathcal{L}_{HS}(H_1; H_2)$).
- (4)- Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est un opérateur compact. De plus, $\mathcal{L}_{HS}(H_1; H_2)$ est dense dans $K(H_1; H_2)$ pour la norme d'opérateurs.
- (5)- $\mathcal{L}_{HS}(H_1; H_2)$ est un idéal.

Exemple 3.6

Soit

$$\alpha = (\alpha_n)_n \in l_\infty,$$

l'opérateur

$$M_\alpha : l_2 \rightarrow l_2, \quad M_\alpha(x) = \alpha x = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n, \dots)$$

est de Hilbert-Schmidt si et seulement si $(\alpha_n)_n \in l_2$.

Chapitre 3

Les opérateurs linéaires absolument (p, q, r) -sommants.

3.1 Introduction

La notion des opérateurs linéaires p -sommants est due à A. Pietsch [Pie67] et la notion de (q, p) -sommants est due à Mitiagin-Pelczyński [MP66]. La théorie des idéaux d'opérateurs sommants, comme il a été présenté par Pietsch dans le cas linéaire est bien établi. Pour plus de détails voir [DJT95, Pie80]. Plusieurs de ces idéaux d'opérateurs sont étudiés, parmi lesquelles on trouve l'idéal $\Pi_{p,q,r}$ des opérateurs linéaires (p, q, r) -sommants.

Dans ce chapitre, on développe les propriétés de l'idéal $\Pi_{p,q,r}$, on donnera le théorème de domination de Pietsch pour cette catégorie et le théorème de Factorisation par les L_p . On terminera ce chapitre par le théorème de Kwapien (généraliser par Lapreste [Lap76], pour $p > 1$)

Rappelons quelques définitions des espaces des opérateurs sommants et des lemmes standards.

Définition 1.1 [Pie67](opérateurs p -sommants)

Soient X, Y deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. On dira que T est p -sommants

pour $1 \leq p < \infty$ si,

$$\begin{cases} \exists C > 0, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \forall \{x_1, \dots, x_n\} \subset X \\ \|(T(x_i)_{1 \leq i \leq n})\|_p \leq C \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{p, \omega} \end{cases}$$

On note

$$\pi_p(X, Y) = \{T : X \longrightarrow Y \text{ linéaires } p\text{-sommants}\}$$

et

$$\pi_p(T) = \inf\{C, \text{ vérifiant la définition 1.1}\}$$

Définition 1.2 [Coh73](opérateurs fortement p -sommants)

Un opérateur linéaire $T : X \longrightarrow Y$ est fortement p -sommants ($1 \leq p < \infty$), s'il existe une constante positive C tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in X$ et $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$, on a

$$\|(\langle T(x_i), y_i^* \rangle)\|_1 \leq C \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_p \sup_{y \in B_Y} \|(y_i^*(y))\|_{p^*}.$$

On note $\mathcal{D}_p(X, Y)$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires qui sont fortement p -sommants de X dans Y et on note $d_p(T)$ la plus petite constante C vérifiant la définition 1.2.

Pour $p = 1$, on a $\mathcal{D}_1(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$.

Théorème 1.3[Coh73, Theorem 2.2.2(i)]

Soit X, Y deux espaces de Banach. Alors. L'opérateur T est p -sommants de X dans Y ($1 \leq p < \infty$) si et seulement si l'opérateur adjoint T^* est fortement p^* -sommants de Y^* dans X^* et $d_{p^*}(T^*) = \pi_p(T)$.

Lemme 1.4

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_N \geq 0$. pour q_1, \dots, q_N tel que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_N}$, on a

$$\frac{1}{p} \prod_{j=1}^N \alpha_j^P \leq \sum_{j=1}^N \frac{1}{P_j} \alpha_j^{p_j}.$$

Preuve.

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \alpha_1^p \dots \alpha_N^p &= \frac{1}{p} e^{\text{Log}(\alpha_1^p) + \dots + \text{Log}(\alpha_N^p)} \\ &= \frac{1}{p} e^{\frac{p}{p_1} \text{Log}(\alpha_1^{p_1}) + \dots + \frac{p}{p_N} \text{Log}(\alpha_N^{p_N})} \end{aligned}$$

et on applique la convexité de la fonction exponentielle.

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \alpha_1^p \dots \alpha_N^p &\leq \frac{1}{p} \left(\frac{p}{p_1} e^{\text{Log}(\alpha_1^{p_1})} + \dots + \frac{p}{p_N} e^{\text{Log}(\alpha_N^{p_N})} \right) \\ &= \frac{1}{p_1} e^{\text{Log}(\alpha_1^{p_1})} + \dots + \frac{1}{p_N} e^{\text{Log}(\alpha_N^{p_N})} \\ &= \frac{1}{p_1} \alpha_1^{p_1} + \dots + \frac{1}{p_N} \alpha_N^{p_N}. \end{aligned}$$

Lemme de Ky Fan.

Pour la preuve de ce lemme, le lecteur intéressé peut consulter [DJT95, page 190].

Une fonction f de Ω dans $[-\infty, +\infty]$ est dite semicontinue inférieurement en un point x si l'on a

$$f(x) \leq \liminf_{y \rightarrow x} f(y) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ f(y) : \|y - x\| < \varepsilon \}.$$

C'est à dire si pour toute suite (x_k) convergente vers x ,

$$f(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} (f(x_k)) := \lim_{k \rightarrow \infty} \inf \{ f(x_j) : j \geq k \}.$$

Lemme 1.5. Soient E un espace vectoriel topologique séparé, C une partie convexe compacte de E . Soit M un ensemble de fonctions définies sur C à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (a) Toute $f \in M$ est convexe et semicontinue inférieurement.
- (b) Si $g \in \text{conv}(M)$, il existe $f \in M$ telle que $g(x) \leq f(x)$, $\forall x \in C$.
- (c) Il existe $r \in \mathbb{R}$ telle que toute $f \in M$ prend une valeur $\leq r$.

Alors , il existe $x_0 \in C$ telle que $f(x_0) \leq r$ pour toute $f \in M$.

3.2 Les opérateurs linéaires (p, q, r) -sommants

Ces opérateurs ont été introduits par Pietsch dans [Pie 80], où il on donne, avec démonstration, les propriétés élémentaires.

Définition 2.1

Soient $0 < p, q, r \leq \infty$ et $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est (p, q, r) -sommants, s'il existe une constante $C \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in X$ et $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$, on a

$$\| (\langle T(x_i), y_i^* \rangle) \|_p \leq C \| (x_i)_{1 \leq i \leq n} \|_{q,w} \| (y_i^*)_{1 \leq i \leq n} \|_{r,w} \quad (3.1)$$

On note $\Pi_{p,q,r}(X, Y)$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires qui sont (p, q, r) -sommants de X dans Y et on note par $\pi_{p,q,r}(T)$ la plus petite constante C vérifiant l'inégalité (3.1).

Remarque 2.2

- 1) Pour $p = r = 1$ et $q = \infty$, on a $\Pi_{1,\infty,1}(X, Y) = \mathcal{D}_\infty(X, Y)$.
- 2) Si X est de dimension finie, on a $\Pi_{1,q,q^*}(X, Y) = \mathcal{D}_q(X, Y)$.

Théorème 2.3

Soit $1 \leq p < \infty$ et X, Y deux espaces de Banach

- (1) Si $T \in \Pi_{p,q,r}(X, Y)$, alors T est continu et $\|T\| \leq \pi_{p,q,r}(T)$.
- (2) $\Pi_{p,q,r}(X, Y)$ est un espace de Banach.

Démonstration.

- 1) Pour $n = 1$, on a

$$\begin{aligned} |\langle T(x), y^* \rangle| &\leq \pi_{p,q,r}(T) \sup_{\xi \in B_{X^*}} |\langle \xi, x \rangle| \sup_{\eta \in B_Y} |\langle \eta, y^* \rangle| \\ &\leq \pi_{p,q,r}(T) \|x\| \|y^*\| \end{aligned}$$

Ce qui entraine que $\|T(x)\| = \sup_{y^* \in B_{Y^*}} |\langle T(x), y^* \rangle| \leq \pi_{p,q,r}(T) \|x\|$.

D'où $\|T\| \leq \pi_{p,q,r}(T)$.

(2) $\Pi_{p,q,r}(X, Y)$ est un sous espace vectoriel.

a) Soient $T, S \in \Pi_{p,q,r}(X, Y)$. Soient $(x_k)_{1 \leq k \leq n} \subset X$ et $(y_k^*)_{1 \leq k \leq n} \subset Y^*$.

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^n |\langle (T+S)(x_k), y_k^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{k=1}^n |\langle T(x_k) + S(x_k), y_k^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^n |\langle T(x_k), y_k^* \rangle + \langle S(x_k), y_k^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^n (|\langle T(x_k), y_k^* \rangle| + |\langle S(x_k), y_k^* \rangle|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^n |\langle T(x_k), y_k^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |\langle S(x_k), y_k^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_{p,q,r}(T) \| (x_k) \|_{q,w} \| (y_k^*) \|_{r,w} + \pi_{p,q,r}(S) \| (x_k) \|_{q,w} \| (y_k^*) \|_{r,w} \\
&= [\pi_{p,q,r}(T) + \pi_{p,q,r}(S)] \| (x_k) \|_{q,w} \| (y_k^*) \|_{r,w}
\end{aligned}$$

D'où $T + S \in \Pi_{p,q,r}(X, Y)$ et $\pi_{p,q,r}(T + S) \leq \pi_{p,q,r}(T) + \pi_{p,q,r}(S)$.

b) Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $T \in \Pi_{p,q,r}(X, Y)$.

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^n |\langle \alpha T(x_k), y_k^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{k=1}^n |\langle T(\alpha x_k), y_k^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_{p,q,r}(T) \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle \xi, \alpha x_k \rangle|^q \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{\eta \in B_Y} \left(\sum_{k=1}^n |\langle \eta, y_k^* \rangle|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\
&= |\alpha| \pi_{p,q,r}(T) \| (x_k) \|_{q,w} \| (y_k) \|_{r,w}.
\end{aligned}$$

On a alors

$$\pi_{p,q,r}(\alpha T) \leq |\alpha| \pi_{p,q,r}(T).$$

D'autre part,

$$\pi_{p,q,r}(T) = \pi_{p,q,r}\left(\frac{1}{\alpha}(\alpha T)\right) \leq \frac{1}{|\alpha|} \pi_{p,q,r}(\alpha T),$$

Donc

$$\pi_{p,q,r}(\alpha T) \geq |\alpha| \pi_{p,q,r}(T),$$

D'où

$$\pi_{p,q,r}(\alpha T) = |\alpha| \pi_{p,q,r}(T).$$

Finalement, $\Pi_{p,q,r}(X, Y)$ est un espace vectoriel normé.

ii) $\Pi_{p,q,r}(X, Y)$ est complet.

Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\Pi_{p,q,r}(X, Y)$.

D'après (1) on a

$$\|T_n - T_m\| \leq \pi_{p,q,r}(T_n - T_m).$$

Donc $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(X, Y)$. Alors converge vers une limite $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Soient $\epsilon > 0$ donné et k_0 un entier. Soient $n, m \geq k_0$, tels que

$$\pi_{p,q,r}(T_n - T_m) \leq \epsilon.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$. $(x_1, \dots, x_N) \subset X$, $(y_1^*, \dots, y_N^*) \subset Y^*$.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^N |\langle (T_n - T_m)(x_k), y_k^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \pi_{p,q,r}(T_n - T_m) \| (x_k) \|_{q,w} \| (y_k) \|_{r,w} \\ &\leq \epsilon \| (x_k) \|_{q,w} \| (y_k) \|_{r,w}. \end{aligned}$$

En faisant tendre m vers l'infinie.

$$\left(\sum_{k=1}^N |\langle (T_n - T)(x_k), y_k^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q,r}(T_n - T) \| (x_k) \|_{q,w} \| (y_k) \|_{r,w},$$

on a montrer que

$$(T_n - T) \in \Pi_{p,q,r}(X, Y) \text{ et } \pi_{p,q,r}(T_n - T) \leq \epsilon.$$

Enfin

$$T = T - T_n + T_n,$$

on a

$$T - T_n \in \Pi_{p,q,r}(X, Y) \text{ et } T_n \in \Pi_{p,q,r}(X, Y),$$

donc

$$T \in \Pi_{p,q,r}(X, Y).$$

Ce qui prouve $\Pi_{p,q,r}(X, Y)$ que est bien un espace vectoriel complet. Alors $\Pi_{p,q,r}(X, Y)$ est un espace de Banach.

La proposition suivante affirme que $(\Pi_{p,q,r}(X, Y), \pi_{p,q,r}(.))$ est un idéal de Banach ($p \geq 1$).

Proposition 2.4

i) L'ensemble $\Pi_{p,q,r}(X, Y)$ est un sous espace de $\mathcal{L}(X; Y)$ qui contient les opérateurs linéaires de rang finis.

ii) Propriété d'idéal. Soient $T \in \Pi_{p,q,r}(X, Y)$, $u \in \mathcal{L}(E, X)$ et $v \in \mathcal{L}(Y, F)$. (X, Y, E , et F sont des espaces de Banach quelconques). Alors,

vTu est p -sommants et

$$\pi_{p,q,r}(vTu) \leq \|v\| \pi_{p,q,r}(T) \|u\|.$$

iii) $\pi_{(p,q,r)}(id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} : id_{\mathbb{K}}(x) = x) = 1$.

Démonstration.

i) Il suffit de montrer la propriété pour les opérateurs de rang 1. ($T(x) = x^*(x)y$).

Soit $(x_1, \dots, x_n) \subset X, (y_1^*, \dots, y_n^*) \subset Y^*$.

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{k=1}^n |\langle T(x_k), y_k^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^n |\langle x^*(x_k) y, y_k^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^n |\langle x^*, x_k \rangle|^p |\langle y, y_k^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^n |\langle x^*, x_k \rangle|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle y, y_k^* \rangle|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \|x^*\| \|y\| \left(\sum_{k=1}^n \left| \left\langle \frac{x^*}{\|x^*\|}, x_k \right\rangle \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^n \left| \left\langle \frac{y}{\|y\|}, y_k^* \right\rangle \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \|x^*\| \|y\| \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle \xi, x_k \rangle|^q \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{\eta \in B_Y} \left(\sum_{k=1}^n |\langle \eta, y_k^* \rangle|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \|x^*\| \|y\| \|(x_k)\|_{q,w} \|(y_k^*)\|_{r,w} .
\end{aligned}$$

D'où, $T \in \Pi_{p,q,r}(X, Y)$ et $\pi_{p,q,r}(T) = \|x^*\| \|y\| \cdot (\text{car } \|y\| \|x^*\| = \|T\| \leq \pi_{p,q,r}(T))$.

ii) Soient $(x_1, \dots, x_n) \subset E$ et $(y_1^*, \dots, y_n^*) \subset F^*$

$$E \xrightarrow{u} X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{v} F$$

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^n |\langle v \circ T \circ u(x_k), y_k^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{k=1}^n |\langle T(u(x_k)), v^*(y_k^*) \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \pi_{p,q,r}(T) \sup_{\alpha \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle u(x_k), \alpha \rangle|^q \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{\beta \in B_Y} \left(\sum_{k=1}^n |\langle v^*(y_k^*), \beta \rangle|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \pi_{p,q,r}(T) \sup_{\alpha \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, u^*(\alpha) \rangle|^q \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{\beta \in B_Y} \left(\sum_{k=1}^n |\langle y_k^*, v(\beta) \rangle|^r \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

$$u^* : X^* \rightarrow E^*, \alpha \rightarrow u^*(\alpha),$$

On pose

$$\xi = \frac{u^*(\alpha)}{\|u^*(\alpha)\|} = \frac{u^*(\alpha)}{\|u(\alpha)\|} \in B_{E^*},$$

$$v : Y \rightarrow F, \beta \rightarrow v(\beta),$$

On pose

$$\eta = \frac{v(\beta)}{\|v(\beta)\|} \in B_F$$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^n |\langle v \circ T \circ u(x_k), y_k^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \pi_{p,q,r}(T) \sup_{\alpha \in B_{X^*}} \left[\|u^*(\alpha)\| \left(\sum_{k=1}^n \left| \langle x_k, \frac{u^*(\alpha)}{\|u^*(\alpha)\|} \rangle \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \sup_{\beta \in B_Y} \left[\|v(\beta)\| \left(\sum_{k=1}^n \left| \langle y_k^*, \frac{v(\beta)}{\|v(\beta)\|} \rangle \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right] \\ & = \|u^*\| \pi_{p,q,r}(T) \|v\| \sup_{\xi \in B_{E^*}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle x_k, \xi \rangle|^q \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{\eta \in B_F} \left(\sum_{k=1}^n |\langle y_k^*, \eta \rangle|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ & = \|u\| \pi_{p,q,r}(T) \|v\| \|(x_k)\|_{q,w} \|(y_k^*)\|_{r,w}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $v \circ T \circ u$ est (p, q, r) -sommant et

$$\pi_{p,q,r}(v \circ T \circ u) \leq \|u\| \pi_{p,q,r}(T) \|v\|.$$

iii) D'après le Théorème 2.3(1), on a

$$\pi_{(p,q,r)}(id_{\mathbb{K}}) \geq \|id_{\mathbb{K}}\| = 1.$$

Pour montrer l'égalité, il suffit de montrer que $\pi_{(p,q,r)}(id_{\mathbb{K}}) \leq 1$. Si $(y_i^*)_{i=1}^n \in l_{w,r}(\mathbb{K}^*)$ and

$(x_i)_{i=1}^n \in l_{w,q}(\mathbb{K})$, on a

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n |y_i^*(id_{\mathbb{K}}(x_i))|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^n |y_i^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n |y_i^*|^r \right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_r \|(x_i)_{i=1}^n\|_q \\
&= \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{w,r} \|(x_i)_{i=1}^n\|_{w,q}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\pi_{(p,q,r)}(id_{\mathbb{K}}) = 1.$$

Théorème 2.5 (*Théorème d'inclusion*).

Soit $p_1 \leq p_2, q_1 \leq q_2$ et $r_1 \leq r_2$. Supposons que

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{p_1} \leq \frac{1}{q_2} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{p_2}.$$

Alors

$$\Pi_{(p_1,q_1,r_1)}(X,Y) \subseteq \Pi_{(p_2,q_2,r_2)}.$$

Preuve.

On pose

$$\frac{1}{p_0} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}, \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}, \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}$$

et

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$$

alors

$$p_0 \leq p, \left(\frac{1}{p_0} \geq \frac{1}{p} \right)$$

Soit $T \in \Pi_{(p_1,q_1,r_1)}(X,Y)$. Maintenant, pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, x_1, \dots, x_n \in X$ et pour tout

$y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$, d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
& \| (\lambda_i \langle T(x_i), y_i^* \rangle)_{1 \leq i \leq n} \|_{p_2} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n | \langle T(\lambda_i^{\frac{p}{q}} x_i), \lambda_i^{\frac{p}{r}} y_i^* \rangle |^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n | \langle T(\lambda_i^{\frac{p}{q}} x_i), \lambda_i^{\frac{p}{r}} y_i^* \rangle |^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&\leq \pi_{(p_1, q_1, r_1)}(T) \| (\lambda_i^{\frac{p}{q}} x_i)_{1 \leq i \leq n} \|_{q_1, w} \| (\lambda_i^{\frac{p}{r}} y_i^*)_{1 \leq i \leq n} \|_{r_1, w} \\
&\leq \pi_{(p_1, q_1, r_1)}(T) \| (x_i)_{1 \leq i \leq n} \|_{q_2, w} \| (\lambda_i^{\frac{p}{q}})_{1 \leq i \leq n} \|_q \| (y_i^*)_{1 \leq i \leq n} \|_{r_2, w} \| (\lambda_i^{\frac{p}{r}})_{1 \leq i \leq n} \|_r \\
&\leq \pi_{(p_1, q_1, r_1)}(T) \| (x_i)_{1 \leq i \leq n} \|_{q_2, w} \| (y_i^*)_{1 \leq i \leq n} \|_{r_2, w} \| (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \|_p \\
&\leq \pi_{(p_1, q_1, r_1)}(T) \| (x_i)_{1 \leq i \leq n} \|_{q_2, w} \| (y_i^*)_{1 \leq i \leq n} \|_{r_2, w} \| (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \|_{p_0}
\end{aligned}$$

puisque $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ sont arbitraire, il resulte que

$$\left(\sum_{i=1}^n | \langle T(x_i), y_i^* \rangle |^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \pi_{(p_1, q_1, r_1)}(T) \| (x_i)_{1 \leq i \leq n} \|_{q_2, w} \| (y_i^*)_{1 \leq i \leq n} \|_{r_2, w} .$$

Donc

$$T \in \Pi_{(p_2, q_2, r_2)}(X, Y)$$

et

$$\pi_{(p_2, q_2, r_2)}(T) \leq \pi_{(p_1, q_1, r_1)}(T).$$

3.3 Les opérateurs de types $D_{r^*} \circ \Pi_q$

Dans le cas où $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, nous allons voir que les éléments de $\Pi_{p, q, r}$ s'expriment simplement en fonction de ceux de Π_q et D_r ; plus précisément, nous avons le théorème démontré par Kwapien [Kwa] dans le cas $p = 1$.

Définition 3.1

Si T est un opérateur linéaire continu de X dans Y , on dit que T est de type $D_{r^*} \circ \Pi_q$

s'il existe un espace de Banach G et deux opérateurs $A, B : A$ q -sommant de X dans G , B fortement r^* -sommant de Y^* dans G^* avec $T = B \circ A$. L'ensemble des tels opérateurs de X dans Y sera noté $D_{r^*} \circ \Pi_q(X, Y)$.

On pose si $T \in D_{r^*} \circ \Pi_q(X, Y)$ donc,

$$d_{r^*} \pi_q(T) = \inf \{ d_{r^*}(B) \pi_q(A) \},$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des factorisations de T . Plus précisément, nous avons le théorème démontré par Kwapien [6] dans le cas $p = 1$.

Théorème 3.2 (*Théorème de Pietsch*)

Soient $q \geq 1, r \geq 1$, X et Y deux espaces de Banach; les propriétés suivantes sont équivalentes

- (1) $T \in \Pi_{p,q,r}(X, Y)$.
- (2) Il existe une constante finie ρ et deux probabilités de radon μ et ν , portées respectivement par les boules unités B_{X^*} et $B_{Y^{**}}$ de X^* et Y^{**} , telles que pour tout x de X et y^* de Y^* on ait :

$$| \langle T(x), y^* \rangle | \leq \rho \left(\int_{B_{X^*}} | \langle x, \alpha \rangle |^q d\mu(\alpha) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{B_{Y^{**}}} | \langle y^*, \beta \rangle |^r d\nu(\beta) \right)^{\frac{1}{r}}. \quad (3.2)$$

Démonstration.

Nous nous cantonnerons au cas où q et r sont différents de $+\infty$.

En effet, si $r = +\infty$, $\Pi_{q,q,\infty} = \Pi_q$, et le résultat n'est autre que l'existence de la factorisation de Pietsch d'un opérateur q -sommant [Pie67]. Si $q = +\infty$, le résultat se déduit du précédent par transposition.

(1) \Rightarrow (2).

On considère C l'ensemble des probabilités de Radon (μ, ν) de $C(B_{X^*})^* \times C(B_{Y^*})^*$. Soit M un ensemble des fonctions définies sur C à valeurs dans \mathbb{R} de la forme

$$f_{((x_i), (y_i^*))}(\mu, \nu) =$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{p} |\langle T(x_i), y_i^* \rangle|^p - \rho^p \left[\frac{1}{q} \sum_{i=1}^n \int_{B_{X^*}} |\langle x_i, \varphi \rangle|^q d\mu + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y_i^*, \eta \rangle|^r d\nu \right] \quad (3.3)$$

où $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \subset X$, $(y_i^*)_{1 \leq i \leq n} \subset Y^*$.

C'est évident que M est un cône convexe des fonctions réelles. Soient f, g dans M et $\alpha \in [0, 1]$ tel que pour toute $(x'_i)_{1 \leq i \leq n}, (y_i'^*)_{1 \leq i \leq n}, (x''_i)_{1 \leq i \leq n}, (y_i''^*)_{1 \leq i \leq n}$.

$$f_{((x'_i), (y_i'^*))}(\mu, \nu) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p} |\langle T(x'_i), y_i'^* \rangle|^p - \rho^p \left[\frac{1}{q} \sum_{i=1}^n \int_{B_{X^*}} |\langle x'_i, \varphi \rangle|^q d\mu + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y_i'^*, \eta \rangle|^r d\nu \right]$$

et

$$g_{((x''_i), (y_i''^*))}(\mu, \nu) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p} |\langle T(x''_i), y_i''^* \rangle|^p - \rho^p \left[\frac{1}{q} \sum_{i=1}^n \int_{B_{X^*}} |\langle x''_i, \varphi \rangle|^q d\mu + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y_i''^*, \eta \rangle|^r d\nu \right]$$

Il s'ensuit que (car T est positivement homogène)

$$\begin{aligned} \alpha f &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{p} \alpha |\langle T(x'_i), y_i'^* \rangle|^p - \rho^p \left[\frac{1}{q} \sum_{i=1}^k \alpha \int_{B_{X^*}} |\langle x'_i, \varphi \rangle|^q d\mu + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^k \alpha \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y_i'^*, \eta \rangle|^r d\nu \right] \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{p} |\langle T(\alpha^{\frac{1}{q}} x'_i), \alpha^{\frac{1}{r}} y_i'^* \rangle|^p - \frac{\rho^p}{q} \sum_{i=1}^k \int_{B_{X^*}} |\langle \alpha^{\frac{1}{q}} x'_i, \varphi \rangle|^q d\mu - \frac{\rho^p}{r} \sum_{i=1}^k \int_{B_{Y^{**}}} |\langle \alpha^{\frac{1}{r}} y_i'^*, \eta \rangle|^r d\nu \end{aligned}$$

et

$$(1-\alpha)g = \sum_{i=1}^l \frac{1}{p} | \langle (1-\alpha)^{\frac{1}{q}} T(x_i''), (1-\alpha)^{\frac{1}{r}} y_i^* \rangle |^p - \frac{\rho^p}{q} \sum_{i=1}^k \alpha \int_{B_{X^*}} | \langle (1-\alpha)^{\frac{1}{q}} x_i'', \varphi \rangle |^q d\mu \\ + \frac{\rho^p}{r} \sum_{i=1}^k \int_{B_{Y^{**}}} | \langle (1-\alpha)^{\frac{1}{r}} y_i'', \eta \rangle |^r d\nu$$

Finalement on a

$$\alpha f + (1-\alpha)g = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p} | \langle T(x_i), y_i^* \rangle |^p - \rho^p \left[\frac{1}{q} \sum_{i=1}^n \int_{B_{X^*}} | \langle x_i, \varphi \rangle |^q d\mu + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n \int_{B_{Y^{**}}} | \langle y_i^*, \eta \rangle |^r d\nu \right]$$

avec $n = k + l$,

$$x_i = \begin{cases} \alpha^{\frac{1}{q}} x_i' & \text{si } 1 \leq i \leq k, \\ (1-\alpha)^{\frac{1}{q}} x_i'' & \text{si } k+1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

et

$$y_i^* = \begin{cases} \alpha^{\frac{1}{r}} y_i'^* & \text{si } 1 \leq i \leq k, \\ (1-\alpha)^{\frac{1}{r}} y_i''^* & \text{si } k+1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

Ce qui démontre que M est convexe et par conséquent la condition (b) du lemme de Ky

Fan est vérifiée.

Pour la condition (c).

D'après la Proposition 1.4.2 et la proposition 1.4.3, il existe $y_0 \in B_{Y^{**}}$ tel que

$$\sup_{\|y\|=1} \left(\sum_{i=1}^n | \langle y_i^*, y \rangle |^r \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\sum_{i=1}^n | \langle y_i^*, y_0 \rangle |^r \right)^{\frac{1}{r}},$$

et $x_0^* \in B_{X^*}$ tel que

$$\sup_{\|x^*\|=1} \left(\sum_{i=1}^n | \langle x_i, x^* \rangle |^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^n | \langle x_i, x_0^* \rangle |^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

et f de la forme (3.3)

$$\begin{aligned}
& f_{((x_i), (y_i^*))}(\delta_{x_0^*}, \delta_{y_0}) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{p} |\langle T(x_i), y_i^* \rangle|^p - \rho^p \left[\frac{1}{q} \sum_{i=1}^n \int_{B_{X^*}} |\langle x_i, \varphi \rangle|^q d\delta_{x_0^*} + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y_i^*, \eta \rangle|^r d\delta_{y_0}(\eta) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{p} |\langle T(x_i), y_i^* \rangle|^p - \rho^p \left[\frac{1}{q} \sum_{i=1}^n |\langle x_i, x_0^* \rangle|^q + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n |\langle y_i^*, y_0 \rangle|^r \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{p} |\langle T(x_i), y_i^* \rangle|^p - \rho^p \left[\frac{1}{q} \sup_{\|\varphi\|=1} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, \varphi \rangle|^q \right) + \frac{1}{r} \sup_{\|y\|=1} \left(\sum_{i=1}^n |\langle y_i^*, y \rangle|^r \right) \right]
\end{aligned}$$

(δ_{η_0} est la mesure de Dirac supportée par η_0).

Utilisant le lemme 1.4, et prenons

$$q_1 = \sup_{\|\varphi\|=1} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, \varphi \rangle|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad q_2 = \sup_{\|y\|=1} \left(\sum_{i=1}^n |\langle y_i^*, y \rangle|^r \right)^{\frac{1}{r}},$$

on trouve que

$$\begin{aligned}
& f_{((x_i), (y_i^*))}(\delta_{x_0^*}, \delta_{y_0}) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{p} |\langle T(x_i), y_i^* \rangle|^p - \frac{\rho^p}{p} \left[\sup_{\|\varphi\|=1} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, \varphi \rangle|^q \right)^{\frac{p}{q}} \sup_{\|y\|=1} \left(\sum_{i=1}^n |\langle y_i^*, y \rangle|^r \right)^{\frac{p}{r}} \right]
\end{aligned}$$

et ceci d'après (3.1) est inférieur ou égale à zéro. Si on prend $s = 0$, on aura la condition

(c) vérifiée. D'après le lemme de Ky Fan, il existe $(\mu, \nu) \in C$ tel que

$$f(\mu, \nu) \leq 0 \text{ pour tout } f \in M.$$

Si on prend $x \in X$ et $y^* \in Y$ on aura

$$\begin{aligned}
f(\mu, \nu) &= f_{(x, y^*)}(\mu, \nu) \\
&= \frac{1}{p} |\langle T(x), y^* \rangle|^p - \frac{\rho^p}{q} \int_{B_{X^*}} |\langle x, \varphi \rangle|^q d\mu - \frac{\rho^p}{r} \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y^*, \eta \rangle|^r d\nu \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{p} |\langle T(x), y^* \rangle|^p \leq \frac{\rho^p}{q} \int_{B_{X^*}} |\langle x, \varphi \rangle|^q d\mu + \frac{\rho^p}{r} \int_{B_{Y^{**}}} |\langle y^*, \eta \rangle|^r d\nu$$

Soit alors

$$s_1 = \left(\int_{B_{X^*}} |\langle x, \varphi \rangle|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \text{ et } s_2 = \left(\int_{B_{Y^{**}}} |\langle y^*, \eta \rangle|^r d\nu \right)^{\frac{1}{r}},$$

remplaçons x par $\frac{x}{s_1}$, et y^* par $\frac{y^*}{s_2}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} |\langle T(x), y^* \rangle|^p &\leq \rho^p s_1^p s_2^p \left\{ \frac{1}{q} \frac{1}{s_1^q} s_1^q + \frac{1}{r} \frac{1}{s_2^r} s_2^r \right\} \\
&\leq \frac{\rho^p}{p} s_1^p s_2^p
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$|\langle T(x), y^* \rangle| \leq \rho \left(\int_{B_{X^*}} |\varphi(x)|^q d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{B_{Y^{**}}} |y(y^*)|^r d\nu(y) \right)^{\frac{1}{r}}$$

$$(2) \Rightarrow (1).$$

Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \subset X$ et $(Y_i^*)_{1 \leq i \leq n} \subset Y^*$. On a d'après (3.2)

$$|\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq \rho \left(\int_{B_{X^*}} |\langle x_i, \alpha \rangle|^q d\mu(\alpha) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{B_{Y^{**}}} |\langle y_i^*, \beta \rangle|^r d\nu(\beta) \right)^{\frac{1}{r}}.$$

pour tout $1 \leq i \leq n$. En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n \left| \langle T(x_i), y_i^* \rangle \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \rho \left(\int_{B_{X^*}} \left| \langle x_i, \alpha \rangle \right|^q d\mu(\alpha) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{B_{Y^{**}}} \left| \langle y_i^*, \beta \rangle \right|^r d\nu(\beta) \right)^{\frac{1}{r}}. \\
&\leq \rho \left(\sum_{i=1}^n \int_{B_{X^*}} \left| \langle x_i, \alpha \rangle \right|^q d\mu(\alpha) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^n \int_{B_{Y^{**}}} \left| \langle y_i^*, \beta \rangle \right|^r d\nu(\beta) \right)^{\frac{1}{r}}. \\
&\leq \rho \sup_{\alpha \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n \left| \langle x_i, \alpha \rangle \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{\beta \in B_{Y^{**}}} \left(\sum_{i=1}^n \left| \langle y_i^*, \beta \rangle \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \rho \left\| (x_i)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{q,w} \left\| (y_i^*)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{r,w}.
\end{aligned}$$

Ce implique que $T \in \Pi_{p,q,r}(X, Y)$ et $\pi_{p,q,r}(T) \leq \rho$.

Théorème 3.3 (*Théorème de factorisation*)

- (1) $T \in \Pi_{p,q,r}(X, Y)$.
- (2) T admet la factorisation suivante :

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{T} & Y & & \\
w \downarrow & & & \searrow k_Y & \\
G_q & \xrightarrow{v} & H_r^* & \xrightarrow{u} & Y^{**} \\
\hookrightarrow & & \hookrightarrow & & \\
L_q(B_{X^*}, \mu) & & L_{r^*}(B_{Y^{**}}, \lambda) & &
\end{array}$$

Dans ce diagramme G_q est un sous espace de $L^q(\Omega_1, \mu_1)$, H_r^* le dual de H_r sous espace de $L^r(\Omega_2, \mu_2)$ ((Ω_i, μ_i) espace probabilisés); v est un opérateur continu, w est q -sommants et u fortement r^* -sommants de H_r^* dans Y^{**} .

- (3) Il existe un espace de Banach G et deux opérateurs $A, B : A$ q -sommants de X dans G, B fortement r^* -sommants de Y^* dans G^* , avec $T = B \circ A$.

Démonstration.

Nous allons montrer $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

$$(1) \Rightarrow (2).$$

Soit w_0 l'application de X dans $L^q(B_{X^*}, \mu)$ définie par

$$w_0(x)(\eta) = \langle x, \eta \rangle \quad \text{pour } \eta \in B_{X^*}$$

et de même u_0 de Y^* dans $L^r(B_{Y^{**}}, \nu)$

$$u_0(y)(\xi) = \langle \xi, y \rangle \quad \text{pour } \xi \in B_{Y^{**}}$$

Posons $G_q = \overline{w_0(X)}$ (adhérence dans $L^q(B_{X^*}, \mu)$); $H_r = \overline{u_0(Y^*)}$ (adhérence dans $L^r(B_{Y^{**}}, \nu)$); et soient w et u les applications w_0 et u_0 considérées à présent comme à valeurs dans G_q et H_r respectivement. les opérateurs w et u sont des manière évidente respectivement q et r -sommant et de plus $\pi_q(w) \leq 1, \pi_r(u) \leq 1$. D'après 2.2.2(i) [Coh73], on a $S = u^* : H_r^* \rightarrow Y^{**}$ est fortement r^* -sommant et $d_{r^*}(S) = \pi_r(u)$.

D'un autre coté, étant donné l'inégalité (3.2) l'application bilinéaire de $w_0(X) \times u_0(Y^*)$ dans C

$$v_0 : (w(x), u(y)) \longmapsto \langle T(x), y \rangle,$$

est bien définie et continue; donc elle s'étend en une forme bilinéaire continue \tilde{v}_0 de $G_q \times H_r$ dans M avec conservation de la norme, et induit naturellement une application linéaire continue v de G_q dans H_r

Alors, on a, si $x \in X$ et $y \in Y^*$

$$\begin{aligned} \langle u^* v w x, y \rangle &= \langle v w x, u y \rangle \\ &= v_0(w x, u y) \\ &= \langle B_Y T x, y \rangle. \end{aligned}$$

$$(2) \Rightarrow (3).$$

Il suffit de constater que $u^* \circ v = S \circ v$ est en fait à image dans Y^* est de poser $A = w$, $B = S \circ v$.

$$(3) \Rightarrow (1).$$

C'est une simple conséquence de l'inégalité de Hölder.

Remarque 3.4

Il est facile de constater que l'on a

$$\pi_{p,q,r}(T) = \inf \{ \pi_q(A) d_{r*}(B) \},$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des décomposition décrites en (3).

Bibliographie

- [Coh73] J. S. Cohen, Absolutely p -summing, p -nuclear operators and their conjugates. Math. Ann. 201 (1973), 177-200.
- [Con 01] C. Constantinescu, C^* -Algebras : Banach spaces. Elsevier, 2001.
- [Dei95] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge, Absolutely summing operators. Cambridge University Press, 1995.
- [DJT95] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, Absolutely summing operators. Cambridge University Press, 1995.
- [Kwa] S. Kwapien, On operators factorisable through L_p spaces, Bull. Soc. Math. de France (1970), 31-32.
- [Lap76] J.T. Lapresté, Opérateurs sommants et factorisations. à travers les espaces L_p , Studia Math. 57 (1) (1976).
- [LP68] J. Lindenstrauss and A. Pełczyński, Absolutely summing operators in \mathcal{L}_p spaces and their applications. Studia Math. 29 (1968), 275-326.
- [LT96] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach Spaces, I and II. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [MP66] B. Mitiagin and A. Pełczyński, Nuclear operators and approximative dimensions, Proceedings International Congress of Mathematics, Moscow 1966.
- [Pie80] A. Pietsch, Operator Ideals. Deutsch. Verlag Wiss., Berlin, 1978; North-Holland, Amsterdam-London-New York-Tokyo, 1980.

- [Pie67] A. Pietch, Absolut p -summierende in Abbildungen in normierten Raumen. *Studia Math.* 28 (1967).